GUIA MANGÁ DE
CÁLCULO
DIFERENCIAL E INTEGRAL
HIROYUKI KOJIMA
SHIN TOGAMI
BECOM CO., LTD.
あさがけ新聞社
Ohmsha
novatec

GUIA MANGÁ DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

HIROYUKI KOJIMA
SHIN TOGAMI
BECOM CO., LTD.

novatec

SUMÁRIO

BEM, VOCÊ SE ESPECIALIZOU EM HUMANAS.
SIM, ISSO MESMO! EU ESTUDO LITERATURA DESDE QUE ERA UMA CALOURA NO COLÉGIO.

VOCÊ TEM MUITO A RELEMBRAR, ENTÃO VAMOS COMEÇAR COM FUNÇÕES.
FU...FUNÇÕES? MATEMÁTICA? O QUÊ?

QUANDO UMA COISA MUDA, ELA INFLUENCIA OUTRA COISA. UMA FUNÇÃO É UMA CORRELAÇÃO.
VOCÊ PODE PENSAR NO MUNDO EM SI COMO UMA GRANDE FUNÇÃO.

UMA FUNÇÃO DESCREVE UMA RELAÇÃO, CAUSALIDADE OU MUDANÇA.
COMO JORNALISTAS, NOSSO TRABALHO É ENCONTRAR A RAZÃO DAS COISAS ACONTECEREM – AS CAUSALIDADES.
SIM...

NESSE CASO, f EXPRESSA A RELAÇÃO OU REGRA ENTRE "UM PAI" E "UMA PROLE"
f
UM PAI
UMA PROLE
E ESSA RELAÇÃO É VERDADE PARA QUASE TODOS OS ANIMAIS. SE x É UM PÁSSARO, y É UM FILHOTE DE PÁSSARO.

CORRETO! AGORA OLHE PARA ISSO.

Venda de caviar cai durante recessão
POR EXEMPLO, A RELAÇÃO ENTRE RENDIMENTOS E DESPESAS PODE SER VISTA COMO UMA FUNÇÃO.
COMO QUANDO AS VENDAS DE UMA COMPANHIA SOBEM, OS FUNCIONÁRIOS RECEBEM BÔNUS?

JATO SUPERSÔNICO X-43 ALCANÇA MACH 9,6 – NOVO RECORDE MUNDIAL
A VELOCIDADE DO SOM E A TEMPERATURA TAMBÉM PODEM SER EXPRESSAS COMO UMA FUNÇÃO. QUANDO A TEMPERATURA SOBE 1°C, A VELOCIDADE DO SOM SOBE 0,6 METROS/SEGUNDO.
E A TEMPERATURA NAS MONTANHAS CAI CERCA DE 0,5°C PARA CADA 100 METROS QUE VOCÊ SOBE, NÃO É?
IÚÚ-RÚÚ!

VRUUM...
$$y = \sqrt{R^2 - (x - a)^2} + b$$
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$
VAMOS REPRODUZIR ISSO COM A FÓRMULA DE UM CÍRCULO COM RAIO R CENTRALIZADO NO PONTO (a, b).

ASSUMA QUE A CURVATURA DA ESTRADA ESTEJA NA CIRCUNFERÊNCIA DE UM CÍRCULO COM RAIO R.
R
R
QUANTO MENOR FOR R MAIS FECHADA SERÁ A CURVA.
AH! CUIDADO!

CABUM!

VOCÊ ESTÁ BEM?
ACHO QUE SIM...

CALCULANDO O ERRO RELATIVO

$$\text{Erro relativo} = \frac{\text{Diferença entre } f(x) \text{ e } g(x)}{\text{Variação de x}}$$

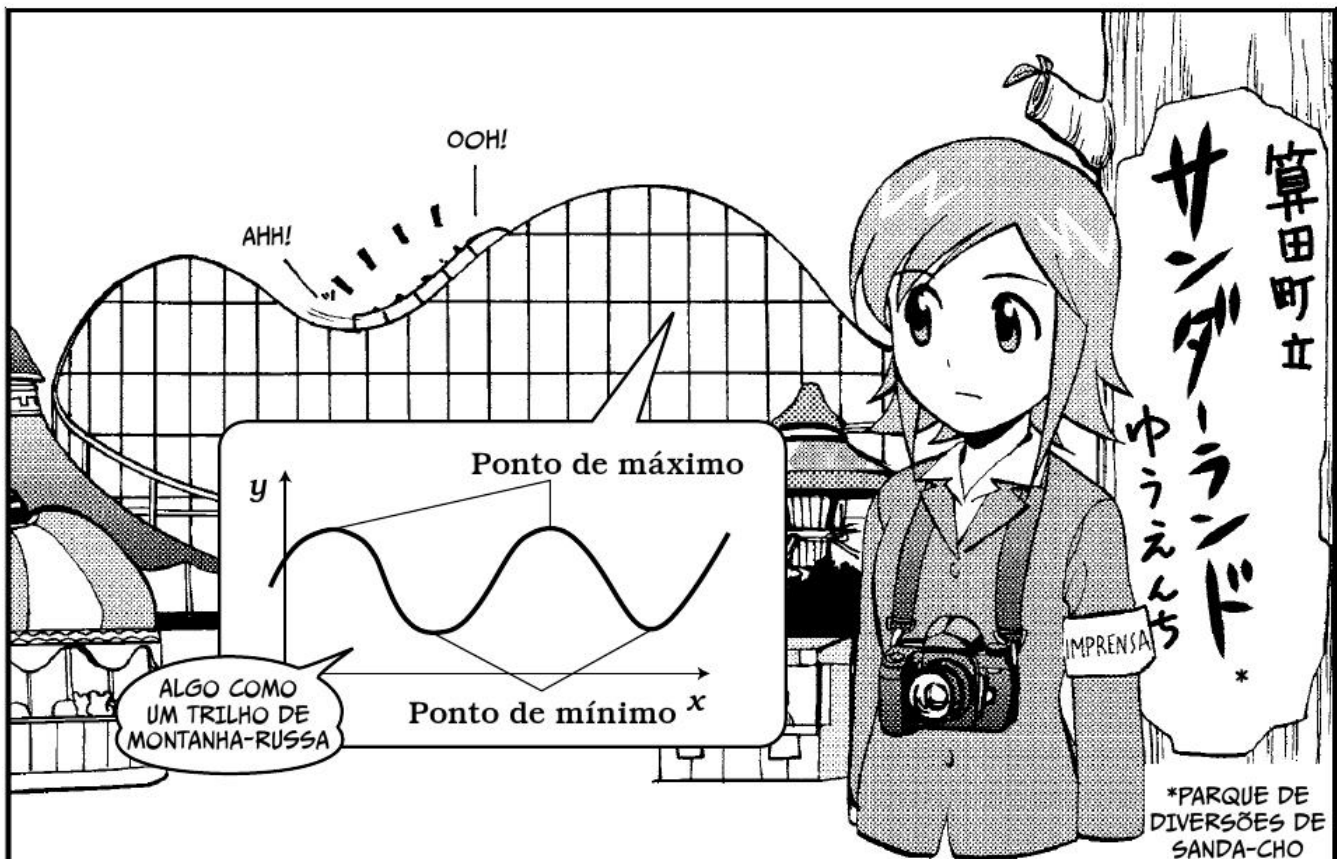
SUPONHA QUE A DISTÂNCIA QUE ELE CAMINHE EM x MINUTOS A PARTIR DO PONTO DE REFERÊNCIA 0 SEJA $f(x)$ METROS.
EM a MINUTOS, ELE ESTARIA NO PONTO A.
f(a)
A

E SUPONHA QUE, EM x MINUTOS, ELE ESTARIA NO PONTO P.
f(x)
f(a)
A
P

ISSO SIGNIFICA QUE ELE VIAJOU DE A ATÉ P EM $(x - a)$ MINUTOS.
CERTO. MAS ISSO SIGNIFICA ALGO?

SUPONHA QUE ESSE TEMPO DE VIAGEM $(x - a)$ SEJA EXTREMAMENTE PEQUENO.
$f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)$
ISSO PODE SER ALTERADO PARA...
$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \approx f'(a)$

SR. SEKI, O LADO ESQUERDO DA EQUAÇÃO É DISTÂNCIA PERCORRIDA DIVIDIDA PELO TEMPO DE VIAGEM. ENTÃO, ISSO É A VELOCIDADE?
EXATO! ENTÃO, $f'(a)$ REPRESENTA A VELOCIDADE DE FUTOSHI AO PASSAR PELO PONTO A.

ENCONTRANDO OS PONTOS DE MÁXIMO E DE MÍNIMO

Máximo e _mínimo_ são os pontos em que uma função muda de crescente para decrescente ou vice-e-versa. Portanto, eles são importantes para examinar as propriedades de uma função.

Como os pontos de máximo e de mínimo costumam ser o máximo ou mínimo absoluto, respectivamente, eles são pontos importantes para se obter uma solução otimizada.

> **TEOREMA 2-1: CONDIÇÕES PARA VALORES EXTREMOS**
>
> **Se $y = f(x)$ tem um ponto de máximo ou de mínimo em $x = a$, então $f'(a) = 0$.**

Isso significa que podemos encontrar os pontos de máximo e de mínimo encontrando valores para a que satisfaçam $f'(a) = 0$. Esse valores também são chamados de pontos extremos.

USANDO FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO

FÓRMULA 3-1: FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO

❶ $$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Os intervalos das integrais definidas de uma mesma função podem ser juntados.

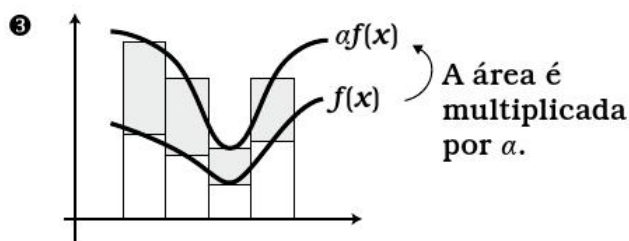
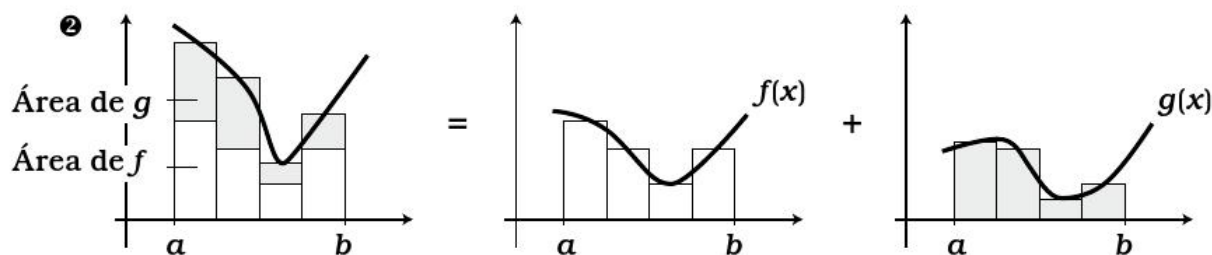
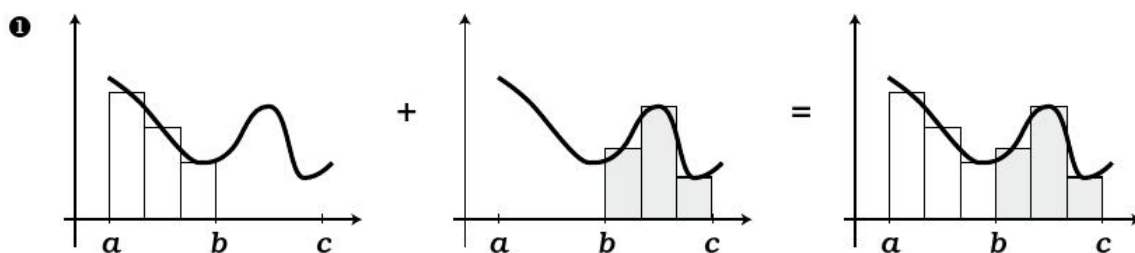
❷ $$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

A integral definida de uma soma pode ser dividida na soma das integrais definidas.

❸ $$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$$

Uma constante de multiplicação dentro de uma integral definida pode ser movida para fora da integral.

As expressões de ❶ a ❸ podem ser entendidas intuitivamente se desenharmos suas figuras.

¥50 JORNAL OFICIAL DO CÁLCULO Vol. 1

Provado que a Integral da Velocidade é a Distância!

Integral da velocidade = diferença na posição = distância percorrida

Se entendermos essa fórmula, dizem que conseguiremos calcular a distância percorrida por objetos cuja velocidade muda constantemente. Mas isso é verdade? Nossa promissora jornalista novata Noriko Hikima vai a fundo na verdade sobre esse assunto em seu relato contundente.

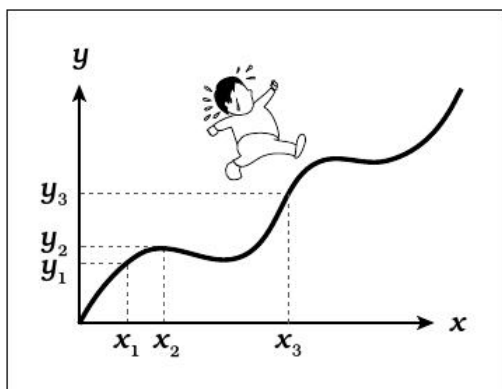



Figura 1: Este gráfico representa a distância percorrida por Futoshi ao longo do tempo. Ele se move pelos pontos y_1, y_2, y_3... conforme o tempo passa em x_1, x_2, x_3...

Sanda-Cho – Alguns leitores se lembrarão do nosso exemplo anterior descrevendo Futoshi caminhando em uma esteira rolante. Outros terão bloqueado deliberadamente tal imagem suada de suas mentes. Mas é quase certeza que você se recorda que a derivada da distância é a velocidade.

❶ $y = F(x)$

❷ $\int_a^b v(x)\,dx = F(b) - F(a)$

A equação ❶ expressa a posição do enorme e suado Futoshi. Em outras palavras, após x segundos ele se arrastou por uma distância total y.

Integral da Velocidade = Diferença na Posição

A derivada de $F'(x)$ da expressão ❶ é a "velocidade instantânea" em x segundos. Se rescrevermos $F'(x)$ como $v(x)$, usando v para velocidade, o Teorema Fundamental do Cálculo pode ser usado para obter a equação ❷! Observe o gráfico de $v(x)$ na Figura 2-A – a velocidade de Futoshi ao longo do tempo. A parte sombreada do gráfico equivale à integral – equação ❷.

Mas olhe também para a Figura 2-*b*, que mostra a distância que Futoshi percorreu ao longo do tempo. Se observarmos as Figuras 2-A e 2-*B* lado a lado, veremos que a integral da velocidade é igual à diferença na posição (ou distância)! Repare como os dois gráficos batem um com o outro – quando a velocidade de Futoshi é positiva, sua distância aumenta, e vice-versa.

Figura 2

*NOTA TRAD.: NORIKO FAZ UM TROCADILHO COM O TERMO "A LITTLE BIT", QUE SIGNIFICA "UM POUQUINHO" EM INGLÊS

GENERALIZANDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

APESAR DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA SEREM CONVENIENTES, A DEFINIÇÃO QUE FIZEMOS DELAS ATÉ AGORA PERMITE APENAS NÚMEROS NATURAIS PARA x EM $f(x) = 2^x$ E POTÊNCIAS DE 2 PARA y EM $g(y) = \log_2 y$. NÃO TEMOS UMA DEFINIÇÃO PARA A POTÊNCIA -8, A POTÊNCIA $7/3$ OU A POTÊNCIA $\sqrt{2}$, $\log_2 5$, OU $\log_2 \pi$.

HMM, O QUE FAZEMOS, ENTÃO?

VOU LHE CONTAR COMO DEFINIMOS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS EM GERAL, USANDO EXEMPLOS.

$$\text{Taxa de crescimento anual} = \frac{\text{Valor após 1 ano} - \text{Valor atual}}{\text{Valor atual}} = \frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)}$$

COMEÇAREMOS COM ESSA EXPRESSÃO.

EXPANSÃO DE TAYLOR DE VÁRIAS FUNÇÕES

[1] EXPANSÃO DE TAYLOR DE UMA RAIZ QUADRADA

Considerando $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$.

Então, partindo de $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}(1+x)^{-\frac{5}{2}},\ldots$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}, f''(0) = -\frac{1}{4}, f'''(0) = \frac{3}{8},\ldots$$

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\times\left(-\frac{1}{4}\right)x^2 + \frac{1}{3!}\times\frac{3}{8}x^3 + \ldots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \ldots$$

[2] EXPANSÃO DE TAYLOR DA FUNÇÃO EXPONENCIAL e^x

Se fizermos $f(x) = e^x$,

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, f'''(x) = e^x,\ldots$$

Então, partindo de

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

Substituindo $x = 1$, obtemos

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

NO CAPÍTULO 4, APRENDEMOS QUE e VALE CERCA DE 2,7. AQUI, NÓS OBTEMOS A EXPRESSÃO QUE CALCULA SEU VALOR EXATO.

[3] EXPANSÃO DE TAYLOR DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA $\ln(1 + x)$

Considerando $f(x) = \ln(x+1)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f''(x) = -(1+x)^{-2}, f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3},$$

$$f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4},\ldots$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1, f^{(3)}(0) = 2!,$$

$$f^{(4)}(0) = -3!,\ldots$$

Temos, então

$$\ln(1+x) =$$

$$0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}\times 2!x^3 - \frac{1}{4}3!x^4 + \ldots$$

$$\ln(1+x) =$$

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n + \ldots$$

[4] EXPANSÃO DE TAYLOR DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Considerando $f(x) = \cos x$.

$$f'(x) = -\text{seno}\, x, f''(x) = -\cos x, f^{(3)}(x)$$

$$= \text{seno}\, x, f^{(4)}(x) = \cos x,\ldots$$

Partindo de

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1,$$

$$f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = 1,\ldots$$

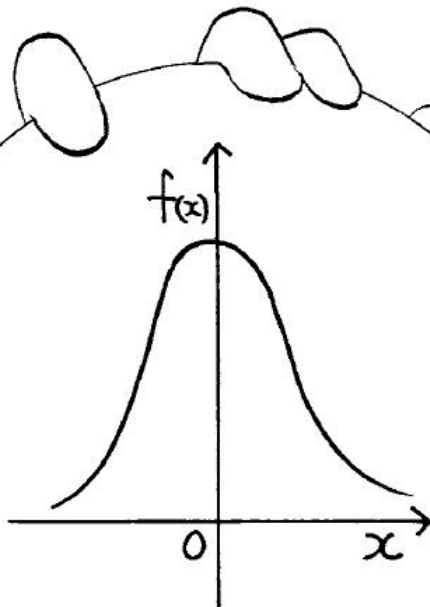
Então,

$$\cos x = 1 + 0x - \frac{1}{2!}\times 1\times x^2 + \frac{1}{3!}\times 0\times x^3 + \frac{1}{4!}\times 1\times x^4 + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \ldots$$

De forma semelhante,

$$\text{seno}\, x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \ldots$$

QUANDO ANALISAMOS COISAS INCERTAS USANDO A PROBABILIDADE, NORMALMENTE USAMOS A DISTRIBUIÇÃO NORMAL.
UH-HUH.
f(x)
0
x

ESSA DISTRIBUIÇÃO É DESCRITA POR UMA DENSIDADE DE PROBABILIDADE QUE É PROPORCIONAL A
$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$
APÓS SER REDIMENSIONADA. O GRÁFICO DE $f(x)$ É SIMÉTRICA EM TORNO DO EIXO Y, COMO MOSTRA A FIGURA, E ELE SE PARECE COM UM SINO.
RABISCA RABISCA
DESCULPE. ELE VAI ESCREVER PRA CARAMBA. VOCÊ PODE NOS DAR MAIS ALGUNS PORTA-COPOS?
PLUMP

MUITO FENÔMENOS POSSUEM ESSA FORMA DE DISTRIBUIÇÃO. POR EXEMPLO, AS ALTURAS DE HUMANOS E ANIMAIS TIPICAMENTE TÊM ESSA DISTRIBUIÇÃO.
BONC
ERROS DE MEDIÇÃO, TAMBÉM.
NOS CÍRCULOS FINANCEIROS, ACREDITA-SE QUE AS TAXAS DE GANHO COM AÇÕES TENHAM UMA DISTRIBUIÇÃO NORMAL.
ALGUMAS CLASSIFICAÇÕES DE ESTUDANTES TÊM SIDO BASEADAS EM UMA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PORQUE OS RESULTADOS DAS PROVAS COSTUMAM SE DISTRIBUIR DESSA MANEIRA.
87

ISSO PODE SER EXPRESSO
x
y
g
z
x1
x2
x3
x4
h
y
POR ESSES DIAGRAMAS.

NO CASO DO SR. SEKI, x É UMA REDAÇÃO EXCELENTE, y É UM ESTILO DE REPORTAGEM VIGOROSO E z É A TRANSFERÊNCIA PARA O ESCRITÓRIO PRINCIPAL. NÃO É ISSO?
BEM, AINDA NÃO SEI QUAIS SÃO AS RAZÕES DA MINHA TRANSFERÊNCIA.

NO CASO DA NORIKO, x_1 É A GAFE DO MÊS PASSADO, x_2 É A GAFE DESSE MÊS, E x_3 E x_4 SÃO A PÉSSIMA APARÊNCIA E HIGIENE QUE RESULTAM EM y, SEU REBAIXAMENTO PARA ESCREVER OBITUÁRIOS.

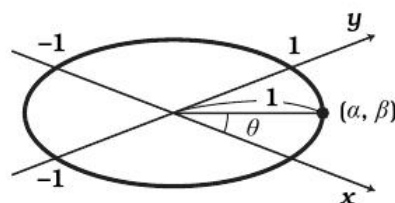
CALA A BOCA, SEU BOI ESTÚPIDO!
APERTA
MUITO BEM, CHEGA. NORIKO, NÃO TEMOS MUITO TEMPO SOBRANDO.
VAMOS APRENDER O BÁSICO RAPIDAMENTE.

Com isso, descobrimos o seguinte.

Se $z = f(x, y)$ possui uma função linear de aproximação perto de $(x, y) = (a, b)$, ela é dada por

❸ $$z = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b)$$

ou* $$z = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + f(a,b)$$

Considere um ponto (α, β) em um círculo de raio 1 centralizado na origem do plano $x - y$ (o chão). Temos $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (ou $\alpha = \cos\theta$ e $\beta = \text{seno}\ \theta$). Agora calculamos a derivada na direção de (0, 0) a (α, β). Um deslocamento de distância t nessa direção é expressa por $(a, b) \to (a + \alpha t, b + \beta t)$. Se fizermos $\varepsilon = \alpha t$ e $\delta = \beta t$ em ❶, obtemos

$$\text{Erro relativo} = \frac{f(a+\alpha t, b+\beta t) - f(a,b) - (p\alpha t + q\beta t)}{\sqrt{\alpha^2 t^2 + \beta^2 t^2}}$$
$$= \frac{f(a+\alpha t, b+\beta t) - f(a,b)}{t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - p\alpha - q\beta$$
$$= \frac{f(a+\alpha t, b+\beta t) - f(a,b)}{t} - p\alpha - q\beta$$

❹ Como $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$

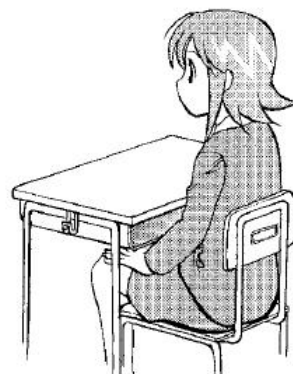
Assumindo $p = f_x(a, b)$ e $q = f_y(a, b)$, nós modificamos ❹ como segue:

❺ $$\frac{f(a+\alpha t, b+\beta t) - f(a, b+\beta t)}{t} + \frac{f(a, b+\beta t) - f(a,b)}{t} - f_x(a,b)\alpha - f_y(a,b)\beta$$

Como a derivada de $f(x, b + \beta t)$, uma função de x apenas, em $x = a$ fica

$$f_x(a, b+\beta t)$$

obtemos, a partir da função linear de aproximação com uma variável,

$$f(a+\alpha t, b+\beta t) - f(a, b+\beta t) \approx f_x(a, b+\beta t)\alpha t$$

* Nós calculamos a função linear de aproximação de forma tal que seu erro relativo se aproxima de 0 quando $AP \to 0$ na direção de x ou y. No entanto, não fica aparente se o erro relativo $\to 0$ quando $AP \to 0$ em qualquer direção para a função linear que é construída a partir das derivadas $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$. Agora nós vamos olhar isso com mais detalhes, apesar da discussão aqui não ser tão rígida.

A
Soluções dos exercícios

Prólogo

1. Substituindo

$$y = \frac{5}{9}(x - 32) \text{ em } z = 7y - 30, z = \frac{35}{9}(x - 32) - 30$$

Capítulo 1

1. A. $f(5) = g(5) = 50$
   B. $f'(5) = 8$

2. $$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(a+\varepsilon)^3 - a^3}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3a^2\varepsilon + 3a\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left(3a^2 + 3a\varepsilon + \varepsilon^2\right) = 3a^2$$

   Então, a derivada de $f(x)$ é $f'(x) = 3x^2$.

Capítulo 2

1. A solução é

$$f'(x) = -\frac{\left(x^n\right)'}{\left(x^n\right)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

B

PRINCIPAIS FÓRMULAS, TEOREMAS E FUNÇÕES APRESENTADOS NESTE LIVRO

EQUAÇÕES LINEARES (FUNÇÕES LINEARES)

A equação de uma reta que tenha inclinação m e que passe por um ponto (a, b):

$$y = m(x - a) + b$$

DERIVAÇÃO

COEFICIENTES DIFERENCIAIS

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

DERIVADAS

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Outras notações de derivadas

$$\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx} f(x)$$

CONSTANTE DE MULTIPLICAÇÃO

$$\{\alpha f(x)\}' = \alpha f'(x)$$

DERIVADAS DE FUNÇÕES DE GRAU N

$$\{x^n\}' = nx^{n-1}$$